Tentamen Partiële Differentiaalvergelijkingen
21 Augustus 2006, 14.00–17.00 uur

1. Los het volgende Cauchy probleem op:

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 1, \quad u(x,x) = \frac{x}{2}.$$

   Controleer het antwoord en schets de karakteristieken.

2. Geef in elk punt van $\mathbb{R}^2$ de klassificatie van de vergelijking

$$(\sin x)^2 u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + u_x = 0,$$

   en bepaal, waar mogelijk, de karakteristieken. Schets de situatie.

3. Beschouw de warmte-vergelijking

$$u_t = u_{xx}, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0,$$

   met de condities

$$u(0,t) = 0, \quad u(\pi,t) = 0, \quad t > 0, \quad u(x,0) = f(x), \quad 0 < x < \pi.$$

   Laat zien dat voor elke functie $f(x)$, $0 < x < \pi$, met $|f(x)| \le 1$, geldt dat voor voldoend grote t:

$$|u(x,t)| \le 2\frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}.$$

   Neem aan dat $f(x)$ gegeven wordt door

$$f(x) = 0, \quad 0 < x \le \pi/2, \quad f(x) = 1, \quad \pi/2 < x \le \pi.$$

   Bepaal de (formele) reeeksontwikkeling van de oplossing $u(x,t)$.

4. Neem aan dat $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ een voldoende glad gebied is en neem aan dat $f : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ een continue functie is. Laat zien dat het niet-lineaire probleem

$$\Delta u - u^3 = 0 \quad \text{in} \quad \Omega,$$

   met de randconditie

$$u = f \quad \text{op} \quad \partial\Omega,$$

   hooguit één oplossing bezit.
   Aanwijzing: gebruik één van de formules van Green en maak gebruik van het feit dat $(a-b)(a^3-b^3)$ niet-negatief is als $a, b \in \mathbb{R}$.